Über ebene Schnitte, die durch eine Gerade einer Fläche gehen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Martin Luther-Universität
Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Martin Dingel
aus Groß Welsbach.

Halle/S.

1937

Druck: BUCHDRUCKEREI JOH. MOLTZEN, LEIPZIG O 5
Wurzner Straße 9

Referent: Professor Dr. H. W. E. Jung.

Korreferent: Professor Dr. H. Brandt.

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juni 1936.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0097

Literatur.

1. H. W. E. Jung: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen (Berlin u. Leipzig 1923).
2. — Algebraische Flächen (Dr. Max Jänecke Verlag, Leipzig, im folgenden zitiert mit J.
3. Albrecht Hoppe: Die Salmonschen Formeln (Dissertation, Halle 1936).
4. H. G. Zeuthen: Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface (Mathem. Ann. Bd. IV).

Inhalt.

Seite

Einleitung 7

I. Kapitel: Ebene Schnitte durch eine Gerade einer Fläche und Berührungskegel von einem Punkt der Geraden an die Fläche 8

§ 1. Vorbemerkung 8
§ 2. Die Gerade 9
§ 3. Die Restkurve 11
§ 4. Berührungskegel, deren Spitze auf der Geraden liegen 18
§ 5. Plückersche Gleichungen 18

II. Kapitel: $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) > 0$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) = 0$ 19

§ 1. Die Stellen 19
§ 2. Die Primteiler 22
§ 3. Die charakteristischen Zahlen 23

III. Kapitel: $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) = 0$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) > 0$ 25

§ 1. Die Stellen 25
§ 2. Die Primteiler 27
§ 3. Die charakteristischen Zahlen 27

IV. Kapitel: $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) > 0$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) > 0$ 28

§ 1. Vorbemerkung 28
§ 2. Der Kniffpunkt 28

V. Kapitel: Der $\overline{n}+1$fache Punkt 29

§ 1. Die Stellen 29
§ 2. Die Primteiler 30
§ 3. Die charakteristischen Zahlen 31

VI. Kapitel: Der stationäre Punkt 32

§ 1. Die Stellen 32
§ 2. Die Primteiler 33
§ 3. Die charakteristischen Zahlen 34

Einleitung.

Im folgenden werden ebene Schnitte einer algebraischen Fläche F untersucht, die durch eine Gerade der Fläche gehen. Diese Schnitte zerfallen in die Gerade und eine Restkurve. Für die Restkurve sollen die charakteristischen Zahlen (Ordnung, Klasse, Zahl der Doppelpunkte usw.) bestimmt werden. Im besonderen soll der Einfluß singulärer Punkte der Fläche, die auf der Geraden liegen, auf diese Zahlen ermittelt werden. Die gleichen Untersuchungen werden für Berührungskegel, die von Punkten der Geraden an die Fläche gelegt werden können, angestellt.

Geometrisch ist diese Aufgabe unter Berücksichtigung einfacherer Singularitäten von H. G. Zeuthen in „Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface; Mathem. Annalen Bd. IV" behandelt worden.

Mit Hilfe der von H. W. E. Jung entwickelten Methoden können wir Gleichungen für beliebige Singularitäten herleiten. Dieses geschieht im ersten Kapitel. In den folgenden Kapiteln werden bestimmte Beispiele untersucht.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor Jung. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Jung für die tatkräftige Unterstützung und fördernde Kritik meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Kapitel I.

Ebene Schnitte durch eine Gerade einer Fläche und Berührungskegel von einem Punkt der Geraden an die Fläche.

§ 1. Vorbemerkungen.

Die Gleichung

(1) $$F(x, y, z) = 0$$

definiere einen algebraischen Körper T zweier unabhängiger Veränderlicher oder eine algebraische Fläche F von der Ordnung n uud der Klasse n', wenn x, y, z kartesische Koordinaten eines Raumpunktes bedeuten.

Zerlegt man in T die Größen x, y, z in Primteiler (J. § 6) und bringt sie auf einen gemeinsamen Hauptnenner, dann ergibt sich die Darstellung

(2) $$x = \frac{A_1}{A_4}, \quad y = \frac{A_2}{A_4}, \quad z = \frac{A_3}{A_4}.$$

Sind die Stellen von T so definiert, daß die A_k keine gemeinsamen Schnittpunkte haben, was im folgenden immer angenommen wird, dann werden die Divisoren des Körpers T mit den entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnet (J. § 7). Die Gleichungen (2) lauten dann

(3) $$x = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_4}, \quad y = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_4}, \quad z = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_4}.$$

Ist $\mathfrak{P}$ eine Kurve der Fläche, dann sprechen wir von der *Kurve auf der Fläche* und *der Kurve im Raum.* Der Unterschied besteht in der Definition der Stellen, durch die $\mathfrak{P}$ geht. Einmal betrachtet man sie als Stellen der Fläche und dann als Stellen im Raum. Zwei Kurven, die sich als Raumkurven schneiden, brauchen es als Kurven auf der Fläche nicht zu tun, da mehrere Stellen von F mit einer Stelle des Raumes zusammenfallen können.

Die Ordnung einer Raumkurve ist durch die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer Ebene gegeben und die Klasse durch die Zahl ihrer Schmiegungsebenen, die sich in einem Punkt des Raumes schneiden.

Die Ordnung einer Kurve auf der Fläche definieren wir durch die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen ebenen Schnitt-

kurve, also durch das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$, die Klasse durch die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Berührungskurve, also durch $(\mathfrak{A}', \mathfrak{P})$.

Mit F bezeichnen wir die Fläche als Punktgebilde und mit F' die Fläche als Ebenengebilde.

§ 2. Die Gerade.

Auf F befinde sich eine Gerade $\mathfrak{H}$. Diese hat als Kurve im Raum die Ordnung 1 und die Klasse 1 wie jede Gerade des Raumes. Als Kurve von F sei $\overline{n}$ die Ordnung und $\overline{n}'$ die Klasse. Wir haben dann

$$(1) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) = \overline{n}, \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) = \overline{n}'.$$

Einen beliebigen ebenen Schnitt durch $\mathfrak{H}$ können wir in der Form

$$(2) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{P}$$

schreiben. Dabei seien in $\mathfrak{V}$ sämtliche Punktprimteiler enthalten, denen auf F' keine Gerade entspricht (s. u.), und in $\mathfrak{P}$ alle Primteiler, die zum Restschnitt gehören.

Als Kurve auf der Fläche besteht $\mathfrak{H}$ i. a. aus mehreren Primkurven. Es sei

$$(3) \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1^{\alpha_1}\mathfrak{H}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{H}_\lambda^{\alpha_\lambda}$$

wobei $\alpha_k \geqq 1$. Die Potenz, in der $\mathfrak{H}_k$ in $\mathfrak{H}$ enthalten ist, kann für einen einzigen Schnitt größer als α_k sein, nämlich wenn die Ebene längs $\mathfrak{H}_k$ die Fläche berührt; vergl. die folgende Darstellung (4).

Ist S eine gewöhnliche Stelle von F, durch die $\mathfrak{H}$ hindurchgeht, dann kann angenommen werden, daß nur einer der Primteiler $\mathfrak{H}_k$ durch S geht. Dieser sei $\mathfrak{H}_1$.

Im Falle $\alpha_1 = 1$ geht $\mathfrak{H}_1$ einfach durch S und liegt einfach auf dem ganzen Blatt, zu dem S gehört. Wir nennen $\mathfrak{H}_1$ einfache Gerade, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}_1) = 1$, und mehrfache Gerade, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}_1) > 1$. Liegt $\mathfrak{H}_1$ gleichzeitig auf mehreren Blättern der Fläche, so müssen diese in einzelnen Stellen von $\mathfrak{H}_1$ analytisch zusammenhängen.

Wenn $\alpha_1 > 1$, dann geht $\mathfrak{H}_1$ durch jede gewöhnliche Stelle mehrfach. Um zu sehen, welche Eigenschaften $\mathfrak{H}_1$ in diesem Falle hat, betrachten wir die Umgebung von S genauer.

Die Gerade sei gegeben durch die Gleichungen $x_1 = 0, x_2 = 0$. Gibt es eine Ebene, die $\mathfrak{H}_1$ in höherer Potenz als α_1, etwa in der Potenz $\alpha_1 + \beta_1$, enthält, dann sei diese $x_2 = 0$. Als zugeordnete Funktion von $\mathfrak{H}_1$ wählen wir u. Setzen wir noch $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$,

dann haben wir in der Umgebung von S für die $\mathfrak{A}_k$ folgende Darstellung:

$$(4)\quad \mathfrak{A}_1 = u^{\alpha_1} h(u,v),\quad \mathfrak{A}_2 = u^{\gamma_1} g(u,v),\quad \mathfrak{A}_3 = k(u,v),\quad \mathfrak{A}_4 = 1.$$

Diese Darstellung läßt sich noch vereinfachen. Wir können annehmen, daß $h(u,v)$ an der Stelle eine Einheit ist und daher setzen $u^{\alpha_1} \cdot h(u,v) = u'^{\alpha_1}$. Daraus ergibt sich u als eine gewöhnliche Potenzreihe von u', v. Ferner können wir an einer gewöhnlichen Stelle voraussetzen, daß $k(u,v)$ mit Gliedern erster Ordnung beginnt und das lineare Glied mit v wirklich vorkommt. Dann setzen wir $v' = k(u,v)$ und $u' = u$ und entwickeln v nach Potenzen von u', v'. Bezeichnen wir zum Schluß die neuen Hilfsgrößen wieder mit u und v, so lautet die Darstellung:

$$(5)\quad \mathfrak{A}_1 = u^{\alpha_1},\quad \mathfrak{A}_2 = u^{\gamma_1} g(u,v),\quad \mathfrak{A}_3 = v,\quad \mathfrak{A}_4 = 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$(6)\quad \mathfrak{R} = -u^{\alpha_1 - 1},\ \mathfrak{A}'_1 = -u^{\gamma_1 - \alpha_1}(\gamma_1 g + u g_1),\ \mathfrak{A}'_2 = \alpha_1,$$
$$\mathfrak{A}'_3 = -\alpha_1 u^{\gamma_1} g_2,\ \mathfrak{A}'_4 = u^{\gamma_1}(\alpha_1 v g_2 + u g_1),$$

wobei mit g_1 und g_2 die partiellen Ableitungen von g nach u und v bezeichnet sind.

Es folgt, daß im Falle $\alpha_1 > 1$ $\mathfrak{H}_1$ in der Potenz $\alpha_1 - 1$ in der Rückkehrkurve enthalten ist. Je nachdem $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}_1) = 1$ oder > 1 ist, nennen wir $\mathfrak{H}_1$ einfache oder mehrfache Rückkehrkurve.

Wir setzen

$$(7)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{H}_1^{\alpha_1 - 1} \mathfrak{H}_2^{\alpha_2 - 1} \cdots \mathfrak{H}_\lambda^{\alpha_\lambda - 1} \mathfrak{R}_0,$$

wobei in $\mathfrak{R}_0$ kein Primteiler $\mathfrak{H}_k$ mehr enthalten ist, und

$$(8)\qquad \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \cdots \mathfrak{H}_\lambda.$$

Bisher ist $\mathfrak{H}_1$ nur auf der Fläche als Punktgebilde betrachtet worden. Berücksichtigt man die Darstellung der $\mathfrak{A}_k'$, dann zeigt sich, daß $\mathfrak{H}_1$ nur für $\alpha_1 = \gamma_1$ wirkliche Gerade auf der Fläche als Ebenengebilde ist. Im Falle $\gamma_1 > \alpha_1$ ist $\mathfrak{H}_1$ Ebenenkurve, denn sämtliche $\mathfrak{A}_k'$ werden für $\mathfrak{H}_1 = 0$ konstant.

Entsprechend finden wir, wenn wir von F' ausgehen, daß eine Gerade Punktkurve sein kann. Damit ergeben sich drei Arten von geraden Linien einer Fläche (J. § 27, 3; § 33). Es ist

1. $\mathfrak{H}$ Punktkurve, $\mathfrak{H}'$ Gerade,
2. $\mathfrak{H}$ Gerade, $\mathfrak{H}'$ Ebenenkurve,
3. $\mathfrak{H}$ Gerade, $\mathfrak{H}'$ Gerade.

Dabei ist mit $\mathfrak{H}'$ die Gerade auf der Fläche als Ebenengebilde gemeint. Die Primteiler $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ sind aber indentisch.

Wir bemerken noch, daß $\mathfrak{H}_1$ in der Salmonschen Kurve in der Potenz $5\gamma_1 - 6$ für $\gamma_1 > \alpha_1$ und in der Potenz $5\gamma_1 - 4$ für $\gamma_1 = \alpha_1$ enthalten ist.

§ 3. Die Restkurve $\mathfrak{P}$.

1. Vorbemerkungen.

Wir hatten für einen beliebigen ebenen Schnitt durch die Gerade die Darstellung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P}$ gefunden, wobei mit $\mathfrak{P}$ die Restkurve bezeichnet war. Bilden wir $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = n$ und benutzen diese Darstellung, dann ergibt sich aus

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{P}) = n,$$

da

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0 \quad , \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) = \overline{n},$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}) = n - \overline{n}$$

als Ordnung von $\mathfrak{P}$.

Im folgenden werden einige Divisoren von $\mathfrak{P}$ bestimmt, wobei $\mathfrak{P}$ als Kurve im Raum angesehen wird. Wir bezeichnen die Divisoren von $\mathfrak{P}$, in die die Divisoren von T für $\mathfrak{P} = 0$ übergehen, mit den entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben.

2. Die Klasse von $\mathfrak{P}$.

Nach J. § 24 Nr. 2 und 6 läßt sich die Klasse eines beliebigen ebenen Schnittes $\mathfrak{P}$ folgendermaßen bestimmen.

Man betrachtet die Berührungskurven $\mathfrak{A}'$ der Kegel, die ihre Spitzen in der Ebene des Schnittes haben, und setzt $\mathfrak{P} = 0$. Die aus den $\mathfrak{A}'$ hervorgehenden Divisoren von $\mathfrak{P}$ können einen gemeinsamen Teiler $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}$ haben, der Berührungsdivisor von $\mathfrak{P}$ genannt wird. Es ergibt sich also

$$\{\mathfrak{A}'\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a}' \tag{2}$$

Die Ordnung der Divisoren $\mathfrak{a}'$ ist dann die Klasse von $\mathfrak{P}$.

Wenden wir diese Definition auf die Schnitte durch $\mathfrak{H}$ an, so erhalten wir formal dieselbe Gleichung. Nur ist hierbei zu beachten, daß es sich um Schnitte durch $\mathfrak{H}$ handelt. Es folgt

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}) = b_{\mathfrak{P}} + \overline{a}', \tag{3}$$

wenn mit $b_{\mathfrak{P}}$ und mit $\overline{a}'$ die Ordnungen der Divisoren $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{a}'$ bezeichnet werden. Da $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{H}^{-1}$. Folglich ergibt sich aus $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = a$

$$\overline{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}) - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) - b_{\mathfrak{P}} \tag{4}$$

als Darstellung für die Klasse des Restschnittes $\mathfrak{P}$.

3. Der Divisor $\mathfrak{z}_1$ der Rückkehrpunkte von $\mathfrak{P}$.

Um den Divisor der Rückkehrpunkte aufzustellen, gehen wir von den Verzweigungsdivisoren

$$\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{a}_\alpha d\mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{a}_\beta d\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{a}_\gamma' \tag{5}$$

aus. Ihr größter gemeinsamer Teiler ist $\mathfrak{z}_1$. Er ist ganz, da auch die $\mathfrak{g}_k$ ganz sind.

Als Ebene, in der $\mathfrak{P}$ liegt, sei $x_4 = 0$ gewählt, so daß

$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{W}\mathfrak{H}\mathfrak{P}. \tag{6}$$

Es ist

$$\mathfrak{Z}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_3, & \mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} = \mathfrak{R}\mathfrak{A}_1' \tag{7}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich

$$\mathfrak{Z}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_3, & \mathfrak{W}\mathfrak{H}\mathfrak{P} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u}, & \mathfrak{W}\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} + \frac{\partial(\mathfrak{W}\mathfrak{H})}{\partial u}\mathfrak{P} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}, & \mathfrak{W}\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} + \frac{\partial(\mathfrak{W}\mathfrak{H})}{\partial v}\mathfrak{P} \end{vmatrix}$$

oder

$$\mathfrak{R}\mathfrak{A}_1' = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_3, & 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u}, & \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}, & \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} \end{vmatrix} + (\mathfrak{P}).$$

Durch Multiplikation mit du und passende Umformungen erhält man

$$\mathfrak{R}\mathfrak{A}_1' du = \mathfrak{W}\mathfrak{H} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_3, & 0 \\ d\mathfrak{A}_2, & d\mathfrak{A}_3, & d\mathfrak{P} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}, & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}, & \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} \end{vmatrix} + (\mathfrak{P}).$$

Setzt man $\mathfrak{P} = 0$, dann folgt

$$\{\mathfrak{R}\mathfrak{A}_1' du\}_{\mathfrak{P}=0} = \left\{\mathfrak{W}\mathfrak{H}\,[\mathfrak{A}_2 d\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_3 d\mathfrak{A}_2]\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}\right\}_{\mathfrak{P}=0},$$

und daraus

$$\mathfrak{a}_2 d\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_2 = \left\{\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{W}\mathfrak{H}} \cdot \frac{du}{\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}}\right\}_{\mathfrak{P}=0}.$$

Unter Beachtung von (2) und (5) geht die letzte Gleichung über in

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}}. \tag{8}$$

Mit Rücksicht auf die Formeln (7) und (8), § 2 erhalten wir schließlich

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{h}_0\,\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}}. \tag{9}$$

Wir betrachten noch einige besondere Fälle.

a) Es sei S eine Stelle, durch die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ hindurchgehen. $\mathfrak{P}$ habe in S einen einfachen Punkt. Ferner sei in S $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{B}_0 = 1$.

Der zur Stelle S gehörende Primteiler von $\mathfrak{P}$ sei $\mathfrak{p}$, Wir wollen noch annehmen, daß in S $(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{P}) = 1$, dann ist $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{v} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = 1$.

Daraus folgt für $\mathfrak{z}_1$ in der Umgebung von S

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}}{\mathfrak{p}}.$$

Da $\mathfrak{z}_1$ ganz ist, so muß $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}$ mindestens durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein. Wegen der Annahme, daß $\mathfrak{P}$ in S einen einfachen Punkt hat, ist an der Stelle S $\mathfrak{z}_1 = 1$, folglich $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}$. Die Ebene des Schnittes berührt daher in S die Fläche.

b) Wir setzen wieder voraus, daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}_0 = 1$. Doch soll $\mathfrak{P}$ in diesem Fall in S einen mehrfachen Punkt haben, etwa einen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten. Es besteht dann $\mathfrak{P}$ in S aus zwei Zweigen. Die beiden zu S gehörenden Primteiler von $\mathfrak{P}$ seien $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Wir wollen annehmen, daß $\mathfrak{P}$ nicht Tangente an einem der Zweige ist, also $(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{P}) = 2$. Dann ist $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{v} = 1$ und

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}}{\mathfrak{p}_1^2\,\mathfrak{p}_2^2}.$$

Da $\mathfrak{z}_1$ ein ganzer Divisor ist, so folgt, daß $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}$ mindestens durch $\mathfrak{p}_1^2\,\mathfrak{p}_2^2$ teilbar ist. Geometrisch bedeutet das, daß die Ebene des Schnittes in S die Fläche in höherer Ordnung berührt.

c) Es sei S eine Stelle, durch die $\mathfrak{R}_0$ hindurchgeht. $\mathfrak{R}_0$ sei keine ebene Kurve und habe in S als Kurve von F keine mehrfache Stelle. Außerdem sollen sich $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ in S einfach schneiden. Dann können wir in der Umgebung von S die Divisoren $\mathfrak{A}_k$ in folgender Weise darstellen:

$$\mathfrak{A}_1 = u^{\alpha} g(u, v), \quad \mathfrak{A}_2 = u^{\alpha} h(u, v), \quad \mathfrak{A}_3 = k(u, v), \quad \mathfrak{A}_4 = 1.$$

Dabei sei u die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{H}_1$ und $\alpha_1 = \alpha$ gesetzt. Ist v die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{R}_0$, so ergibt sich im einfachsten Fall

$$g(u,v) = ua_0(u) + a_2(u)v^2 + \dots$$
$$h(u,v) = ub_0(u) + b_2(u)v^2 + \dots$$
$$k(u,v) = uc_0(u) + c_2(u)v^2 + \dots .$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{A}_1' = ud_0(u) + ud_1(u)v + d_2(u)v^2,$$
$$\mathfrak{A}_2' = ue_0(u) + ue_1(u)v + e_2(u)v^2,$$
$$\mathfrak{A}_3' = au^\alpha\{ut_0(u) + ut_1(u)v + t_2(u)v^2 + \dots\},$$
$$\mathfrak{A}_4' = u^\alpha\{u^2s_0(u) + u^2s_1(u)v + us_2(u)v^2 + \dots\},$$
$$\mathfrak{R} = u^{\alpha-1}v, \quad \mathfrak{R}_0 = v.$$

Als ebenen Schnitt wählen wir $\mathfrak{A}_1$. Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ ist dann an der Stelle S

$$\mathfrak{P}(u,v) = g(u,v) = ua_0 + a_2v^2 + \dots .$$

Für $\mathfrak{P} = 0$ folgt:

$$u = p(v) = a_2v^2 + a_3v^3 + \dots .$$

Diese Entwicklung denken wir uns in die zugeordneten Funktionen von $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{A}_k'$, wobei $k = 2, 3, 4$, eingesetzt. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$ den zu S gehörenden Primteiler von $\mathfrak{P}$, dann ergibt sich $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}_\mathfrak{P} = \mathfrak{p}^2$. Ferner ist $\mathfrak{d}_\mathfrak{P} = 1$. Wir erhalten

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{p},$$

d. h. $\mathfrak{P}$ hat in S einen Rückkehrpunkt.

Für $\mathfrak{R}_0 = v = 0$ wird im Falle $\alpha = 1$ $x_1 = a_{00}u^2 + \dots$, $x_2 = b_{00}u^2 + \dots$, $x_3 = c_{00}u + \dots$, $x_4 = 1$, woraus man sieht, daß $\mathfrak{R}_0$ in S einen Rückkehrpunkt hat.

d) Es sei S wieder definiert wie im Falle c, doch sollen jetzt $g(u,v)$ und $h(u,v)$ die Gestalt haben

$$g(u,v) = a_0(u)u^2 + a_2(u)v^2 + \dots$$
$$h(u,v) = b_0(u)u^2 + b_2(u)v^2 + \dots .$$

Die Darstellung von $k(u,v)$ soll genau so wie im Fall c sein. Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ ist an dieser Stelle

$$\mathfrak{P}(u,v) = g(u,v) = \{(v - v_1(u)\}\{v - v_2(u)\}E.$$

Der Primteiler $\mathfrak{P}$ hat in S einen Doppelpunkt und zwar einen Selbstberührungspunkt. Denn für $v = v_i(u)$ werden x_1 und x_2 durch $u^{\alpha+2}$ und x_3 durch u teilbar. Daher haben beide Zweige von $\mathfrak{P}$ in S die Tangente $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Für $\mathfrak{R}_0 = v = 0$ wird im Falle $\alpha = 1$ $x_1 = u^3$, $x_3 = u$. Es hat $\mathfrak{R}_0$ in S die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ zur stationären Tangente. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}_0$ berühren sich in S.

Durch $\nu = \nu_1(u)$ und $\nu = \nu_2(u)$ werden in S zwei Primteiler $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ von $\mathfrak{P}$ definiert. Es ergibt sich hier $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Um $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ zu bestimmen, verfahren wir wieder so wie oben. Es ergibt sich $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Schließlich wird

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2^2}{\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2^2} = 1 .$$

4. Der Divisor m der mehrfachen Punkte von $\mathfrak{P}$.

Es sei $F(x) = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ die Gleichung von F in homogenen Koordinaten. Setzt man $x_k = \frac{\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{A}_0}$, dann geht $F(x)$ in $F(\mathfrak{A}) = F(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4)$ über. Es wird $F(\mathfrak{A}) \equiv 0$, wenn die $\mathfrak{A}_k$ durch ihre zugeordneten Funktionen ersetzt werden.

Die Gerade $\mathfrak{H}$ sei $\bar{n}$fache Gerade von F und gegeben durch $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Als Ebene E von $\mathfrak{P}$ wählen wir $x_4 = 0$, so daß

$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P}. \tag{10}$$

Setzt man in der Flächengleichung $x_4 = 0$, dann ergibt sich

$$\{F(x_1, x_2, x_3, x_4)\}_{x_4=0} = x_3^{\mu} f(x_1, x_2, x_3) . \tag{11}$$

Auf der rechten Seite von (11) sind die x_k die homogenen Koordinaten der Ebene $x_4 = 0$. Wir bezeichnen sie zum Unterschied mit ξ_k und erhalten:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \xi_3^{\mu} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{12}$$

Es sind $\xi_3 = 0$ und $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ die Gleichungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ in der Ebene E. Die Gerade hat sich in der Potenz $\mu \geqq \bar{n}$ abgesondert, wobei $\mu > \bar{n}$ ist, wenn E längs einer oder mehrerer der Geraden $\mathfrak{H}_k$ die Fläche berührt.

Entsprechend ergibt sich, wenn wir von $F(\mathfrak{A}) = 0$ ausgehen und $\mathfrak{P} = 0$ setzen,

$$\{F(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4)\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{a}_3^{\mu} f(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) . \tag{13}$$

Der Divisor m der mehrfachen Punkte wird definiert durch

$$f_{\alpha}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{m}\mathfrak{z}_1\mathfrak{a}_{\alpha}', \tag{14}$$

wobei $\alpha = 1, 2, 3$ und $f_{\alpha}(\mathfrak{a}) = \frac{\partial f(\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_{\alpha}}$.

Differenzieren wir $F(\mathfrak{A})$ partiell nach $\mathfrak{A}_{\alpha}$ und setzen dann $\mathfrak{P} = 0$, so folgt

$$\{F_{\alpha}(\mathfrak{A})\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{a}_3^{\mu} f_{\alpha}(\mathfrak{a}) . \tag{15}$$

Da $F_\alpha(\mathfrak{A}) \sim \mathfrak{R}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_\alpha'$, so wird andererseits

$$\{F_\alpha(\mathfrak{A})\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{r}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_\mathfrak{P}\mathfrak{a}_\alpha'. \tag{16}$$

Aus (14), (15) und (16) erhält man

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_\mathfrak{P}}{\mathfrak{a}_3^\mu \mathfrak{z}_1}$$

und daraus unter Benutzung von (8)

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{d}_\mathfrak{P}\mathfrak{v}\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}_3^\mu}. \tag{17}$$

Über $\mathfrak{a}_3$ können wir folgende Aussagen machen.
Es sei

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{v}\mathfrak{h}\mathfrak{q}.$$

Unter den Ebenen, die durch $\mathfrak{H}$ gehen, kann es eine, aber auch nur eine geben, die $\mathfrak{H}_k$ in höherer Potenz als α_k, etwa in der Potenz $\alpha_k + \beta_k$ enthält. Es sei die Ebene $x_3 + \varrho_k x_4 = 0$, und es sei gesetzt

$$\mathfrak{A}_3 + \varrho_k \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_{3k} = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{Q}_k = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{H}_k^{\beta k}\bar{\mathfrak{Q}}_k.$$

Gibt es keine derartige Ebene, so ist $\beta_k = 0$. Da

$$\mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{Q} \equiv \mathfrak{A}_3 \equiv \mathfrak{A}_{3k} - \varrho_k \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{Q}_k - \varrho_k \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{h}_k^{\beta k}\bar{\mathfrak{Q}}_k - \varrho_k \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P},$$

so wird für $\mathfrak{P} = 0$

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_k = \mathfrak{b}_k^{\beta k}\bar{\mathfrak{q}}_k.$$

Gibt es also ein $\mathfrak{H}_k$, das durch S geht, und gibt es eine Ebene, die die Fläche längs $\mathfrak{H}_k$ berührt, so liefert die Stelle S zu $\mathfrak{q}$ einen Beitrag, d. h. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ schneiden einander in S, so daß alle Restschnitte durch S gehen. Entsprechendes gilt für die Primteiler $\mathfrak{B}_k$. Es können aber $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sich in S schneiden, auch wenn es keinen Primteiler $\mathfrak{H}_k$ und keinen Primteiler $\mathfrak{B}_k$ gibt, längs dessen eine Ebene die Fläche berührt.

Setzt man in (17) $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{v}\mathfrak{h}\mathfrak{q}$, so wird

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{d}_\mathfrak{P}}{(\mathfrak{v}\mathfrak{h})^{\mu-1}\mathfrak{q}^\mu}. \tag{18}$$

Wir betrachten noch einen besonderen Fall.

Es sei S eine gewöhnliche Stelle von F, in der sich $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}_1$ einfach schneiden. Die Ebene von $\mathfrak{P}$ habe keine besondere Lage, so daß $\mu = \bar{n}$. Ferner sei $\mathfrak{d}_\mathfrak{P} = \mathfrak{v} = \mathfrak{q} = 1$. Bezeichnet $\mathfrak{p}$ den zur Stelle S gehörenden Ptimteiler von $\mathfrak{P}$, dann wird $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}^{a_1}$ und damit

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{p}^{a_1(\bar{n}-1)}}.$$

Da $\mathfrak{m}$ ein ganzer Divisor ist, so muß $\mathfrak{d}$ mindestens durch $\mathfrak{p}^{\alpha(\bar{n}-1)}$ teibar sein. Daraus folgt: $\mathfrak{H}_1$ ist in der Doppelkurve $\mathfrak{D}$ mindestens in der Potenz $\alpha(\bar{n}-1)$ enthalten.

5. Der Divisor $\mathfrak{z}_2$ der stationären Tangenten.

Eine Gerade ist stationäre Tangente einer Kurve, wenn sie diese in einem Punkt von höherer Ordnung berührt. Im einfachsten Fall ist sie Wendetangente. Sehen wir die Schnittkurve einer Ebene E mit F als Kurve auf der Fläche an, dann ist die stationäre Tangente von $\mathfrak{P}$ Inflektionstangente von F. Um den Divisor der stationären Tangenten $\mathfrak{z}_2$ von $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, betrachtet man die Inflektionslinien $\mathfrak{J}$. Sie sind der geometrische Ort aller Punkte von F, deren eine Inflektionstangente durch eine beliebige Gerade g des Raumes geht. Wir wählen g in E. Die zu g gehörende Inflektionskurve schneidet E in i Punkten. Die Zahl derer, die nicht auf g liegen, bezeichnen wir mit i_1, die Zahl der übrigen mit i_2. Dann liegen alle Inflektionstangenten, die in den i_1 Punkten an F gelegt werden können, in E, was von den durch die i_2 Punkte gehenden Inflektionstangenten i. a. nicht mehr gesagt werden kann.

Betrachtet man die Divisoren, in die $\mathfrak{J}$ für $\mathfrak{P}=0$ übergehen, so haben diese einen gemeinsamen Teiler, der von der Lage der Geraden g unabhängig ist. Dieser sei $\mathfrak{i}_1$. Es können nur Stellen, die einen Beitrag zu $\mathfrak{i}_1$ liefern, einen Beitrag zu $\mathfrak{z}_2$ geben.

Über die Herleitung des Divisors $\mathfrak{z}_2$ für einen beliebigen ebenen Schnitt vgl. J. § 24 Nr. 4. In unserem Fall besteht der ebene Schnitt aus einer Geraden $\mathfrak{H}$ und einer Kurve $\mathfrak{P}$. Wir betrachten nur die Stellen, durch die $\mathfrak{P}$ hindurchgeht. Da $\mathfrak{H}$ nicht zu $\mathfrak{P}$ gehört, wird der Divisor $\mathfrak{i}_1$ nicht identisch Null. Wir können daher die dort angegebene Methode zur Bestimmung von $\mathfrak{z}_2$ auf unseren Fall übertragen. Wir setzen hier ebenfalls voraus, daß $\mathfrak{P}$, wenn es zerfallen sollte, keine Gerade enthält.

Es ergibt sich dann

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{\mathfrak{i}_1}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}^2}$$

$$i_2 = \{\Sigma p_\alpha a_\alpha\}^2,$$

wobei p_α die Plückerschen Linienkoordinaten von g bedeuten.

§ 4. Berührungskegel, deren Spitze auf der Geraden liegen

Legen wir von einem Punkt der Geraden den Berührungskegel an die Fläche, dann zerfällt dieser in die Gerade und in einen Restkegel. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}'$ einen allgemeinen Berührungskegel oder dessen Berührungskurve, dann ist

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}' \mathfrak{H}' \mathfrak{P}'.$$

Dabei sind in $\mathfrak{B}'$ alle Ebenenkurven enthalten, denen auf der Fläche als Punktgebilde keine Gerade entspricht, und in $\mathfrak{P}'$ alle Primteiler, die zum Restkegel gehören. Der Divisor $\mathfrak{H}'$ hat dieselbe Gestalt wie in § 2, doch schreiben wir hier

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_1'^{\alpha_1'} \mathfrak{H}_2'^{\alpha_2'} \cdots \mathfrak{H}_\lambda'^{\alpha_\lambda'}.$$

Aus $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = n'$ ergibt sich:

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') - (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}') - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}').$$

Da $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}') = 0$, wird

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}') = n' - \bar{n}'$$

als Klasse des Restkegels. Daraus folgt, daß man von einem Punkt der Geraden $n' - \bar{n}'$ Tangentialebenen an die Fläche legen kann.

Die Gleichungen für die Ordnung, die Divisoren der stationären Ebenen und Kanten, den Divisor der mehrfachen Ebenen können wir sofort hinschreiben, da sie denen in den vorhergehenden Paragraphen hergeleiteten dual entsprechen. Durch Vertauschen der gestrichenen Größen mit den ungestrichenen und umgekehrt ergibt sich für

die Ordnung: $\bar{a} = a - (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}') - (\mathfrak{A}, \mathfrak{H}') - b_\mathfrak{P}'$,

den Divisor der stationären Ebenen: $\mathfrak{z}_2 = \dfrac{\mathfrak{r}_0' \mathfrak{d}_\mathfrak{P}'}{\mathfrak{v}' \mathfrak{b}_0' \mathfrak{d}_\mathfrak{P}'}$,

den Divisor der mehrfachen Ebenen: $\mathfrak{m}' = \dfrac{\mathfrak{d}' \mathfrak{d}_\mathfrak{P}'}{(\mathfrak{v}' \mathfrak{b}')^{n'-1} \mathfrak{q}'^{n'}}$,

den Divisor der stationären Kanten: $\mathfrak{z}_1 = -\dfrac{\mathfrak{i}_1}{\mathfrak{v}' \mathfrak{b}' \mathfrak{d}_\mathfrak{P}' \mathfrak{d}_\mathfrak{P}'}$.

§ 5. Die Plückerschen Gleichungen.

Bezeichnen wir die Ordnungen der Divisoren $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$ mit w_1, w_2, $2m$, $2\sigma_\mathfrak{P}$, so bestehen zwischen diesen und der Ordnung $n - n$, der Klasse $\bar{a}'$ und dem Geschlecht p des Restschnittes folgende Plückerschen Gleichungen (J. § 22).

(1) $2p-2=w_1+\bar{a}'-2(n-\bar{n})$; $3(2p-2)=2w_1+w_2-3(n-\bar{n})$
$2p-2=w_2+(n-\bar{n})-2\bar{a}'$; $3(2p-2)=2w_2+w_1-3\bar{a}'$

(2) $(n-\bar{n})(n-\bar{n}-1)=2m+w_1+\bar{a}'=2m_0+3w_1+\bar{a}'$
$\bar{a}(\bar{a}-1)=2m'+w_2+(n-\bar{n})=2m_0'+3w_2+(n-\bar{n})$.

Dabei haben w_1, w_2, $2m$, $\bar{a}'$ folgende Gestalt;

(3) $\bar{a}'=a-(\mathfrak{A}',\mathfrak{B})-(\mathfrak{A}',\mathfrak{H})-b_{\mathfrak{P}}$

(4) $w_1=(\mathfrak{P},\mathfrak{R})-(\mathfrak{P},\mathfrak{B})-(\mathfrak{P},\mathfrak{H})+b_{\mathfrak{P}}-2\sigma_{\mathfrak{P}}$

(5) $2m=(\mathfrak{P},\mathfrak{D})-(\mu-1)(\mathfrak{P},\mathfrak{B})-(\mu-1)(\mathfrak{P},\mathfrak{H})-\mu(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})+2\sigma_{\mathfrak{P}}$

(6) $w_2=i_1-(\mathfrak{P},\mathfrak{B})-(\mathfrak{P},\mathfrak{H})-2b_{\mathfrak{P}}-2\sigma_{\mathfrak{P}}$,

wobei mit i_1 die Ordnung des Divisors i_1 bezeichnet ist. Es ist $(\mathfrak{P},\mathfrak{J})=i_1+i_2$ und $i_2=2(n-\mu)$, so daß $i_1=(\mathfrak{P},\mathfrak{J})-2(n-\mu)=(\mathfrak{P},\mathfrak{J})-2n+2\mu$. Es folgt also aus (6)

(7) $w_2=(\mathfrak{P},\mathfrak{J})-(\mathfrak{P},\mathfrak{B})-(\mathfrak{P},\mathfrak{H})-2n+2\mu-2b_{\mathfrak{P}}-2\sigma_{\mathfrak{P}}$.

Da $\mathfrak{P}\sim\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{H}^{-1}$, so ergibt sich aus (4), (5) und (7), wenn noch $(\mathfrak{A},\mathfrak{R})=c$, $(\mathfrak{A},\mathfrak{D})=2b$, $(\mathfrak{A},\mathfrak{J})-2n=\varkappa'$ gesetzt wird,

(8) $w_1=c-(\mathfrak{H},\mathfrak{R})-(\mathfrak{B},\mathfrak{R})-(\mathfrak{P},\mathfrak{B})-(\mathfrak{P},\mathfrak{H})+b_{\mathfrak{P}}-2\sigma_{\mathfrak{P}}$,

(9) $2m=2b-(\mathfrak{H},\mathfrak{D})-(\mathfrak{B},\mathfrak{D})-(\mu-1)(\mathfrak{P},\mathfrak{B})-(\mu-1)(\mathfrak{P},\mathfrak{H})$
$-\mu(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})+2\sigma_{\mathfrak{P}}$,

(10) $w_2=\varkappa'+2\mu-(\mathfrak{B},\mathfrak{J})-(\mathfrak{H},\mathfrak{J})-(\mathfrak{P},\mathfrak{B})-(\mathfrak{P},\mathfrak{H})-2b_{\mathfrak{P}}-2\sigma_{\mathfrak{P}}$.

Bei der folgenden Betrachtung bestimmter Beispiele sind stets die Zahlen $\bar{a}'$, w_1 und $2m_0=2m-2w_1$ bestimmt worden. Dabei ist $2m_0$ die Zahl der eigentlichen mehrfachen Punkte. Sie lautet

(11) $2m_0=2b_0-(\mathfrak{H},\mathfrak{D}_0)-(\mathfrak{B},\mathfrak{D}_0)-(\mu-3)(\mathfrak{P},\mathfrak{B})$
$-(\mu-3)(\mathfrak{P},\mathfrak{H})-\mu(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})-2b_{\mathfrak{P}}+4\sigma_{\mathfrak{P}}$.

Die Anzahl der stationären Tangenten läßt sich einfacher mit Hilfe der Plückerschen Gleichungen bestimmen.

Kapitel II.

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{H})>0 \qquad (\mathfrak{A}',\mathfrak{H})=0.$$

§ 1. Die Stellen.

Es seien $x=0$, $y=0$ die Gleichungen einer einfachen Geraden $\mathfrak{H}$ der Fläche F. Die Ebene $y=0$ berühre F längs $\mathfrak{H}$ und enthalte $\mathfrak{H}$ in der Potenz $\gamma\geqq 2$. Dann läßt sich F in der Form

(1) $F(x,y,z) = y(a_0 + f_1 + \ldots + f_{\gamma-2}) + f_\gamma + \ldots + f_n = 0$

schreiben, wobei

(2) $f_k = f_k(x,y,z) = a_{k0}(z)x^k + a_{k-1,1}(z)x^{k-1}y + \ldots + a_{0k}(z)y^k$.

Wir sehen in dem durch (1) definierten Körper T x und y als unabhängige Veränderliche an und betrachten die Stelle $x = 0, y = 0$. Da z an dieser Stelle S unbestimmt wird, lösen wir S nach dem Noetherschen Verfahren auf, indem wir zunächst $x = \lambda$, $y = \mu$ setzen und dann die Transformationen

$$(3)\quad \begin{cases} 1. \quad \lambda = \lambda_1\mu_1\,, & \mu = \lambda_1 \quad \text{für } |\mu_1| < r_1 \\ 2. \quad \lambda = \lambda_1\,, & \mu = \lambda_1\mu_1 \text{ für } |\mu_1| \leqq \frac{1}{r_1} \end{cases}$$

ausführen.

Es zeigt sich, daß in allen durch die Transformation 1 erhaltenen Stellen erster Ordnung z bestimmte Werte annimmt, während das bei den durch die Transformation 2 gelieferten Stellen nicht der Fall ist. Die Stelle $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$ muß noch weiter aufgelöst werden, was durch wiederholte Anwendung der Transformationen (3) geschieht. Bei den Stellen zweiter Ordnung 21 ist z überall bestimmt, während es bei den Stellen 22 nicht der Fall zu sein braucht. Dann muß nochmals aufgelöst werden. Die Transformation 1 führt stets zum Ziel, die Transformation 2 braucht es dagegen nicht zu tun.

Wir nehmen an, daß wir zu Stellen s-ter Ordnung gekommen sind, indem wir erst $s-1$ mal die Transformation 2 und dann die Transformation 1 bzw. 2 angewandt haben. Diese Stellen bezeichnen wir mit $2^{s-1}1$ und 2^s. Die Transformationsformeln lauten für:

$$2^{s-1}1: \quad \lambda = \lambda_s\mu_s \;;\quad \mu = \lambda_s^s\mu_s^{s-1} \quad \text{für } |\mu_s| < r_s$$

und

$$2^s: \quad \lambda = \lambda_s \;;\quad \mu = \lambda_s^s\mu_s \qquad \text{für } |\mu_s| \leqq \frac{1}{r_s}.$$

In der Umgebung der Stellen $2^{s-1}1$ hat F die Gestalt

$$(4)\qquad F = \lambda_s^s\mu_s^{s-1}\Phi_s$$

Es ist

$$(5)\quad \Phi_s = a_0 + \lambda_s\mu_s\varphi_{1s} + \lambda_s^2\mu_s^2\varphi_{2s} + \cdots + \lambda_s^{\gamma-2}\mu_s^{\gamma-2}\varphi_{\gamma-2,s} + \lambda_s^{\gamma-s}\mu_s^{\gamma-s+1}\varphi_{\gamma s} + \cdots + \lambda_s^{n-s}\mu_s^{n-s+1}\varphi_{ns} = 0\,,$$

wobei

$$(6)\quad \varphi_{ks} = a_{k0} + a_{k-1,1}\lambda_s^{s-1}\mu_s^{s-2} + \cdots + a_{0k}\lambda_s^{k(s-1)}\mu_s^{k(s-2)}\,.$$

Die Gleichung (5) gilt für den Fall, daß $s \geqq 2$ ist. Wenn $s = 1$, dann sondert sich von den einzelnen Gliedern kein Faktor μ_s ab, wie man sieht, wenn man die Gleichung (6) betrachtet.

1. Fall: $\gamma > s$. Setzen wir $\lambda_s = 0$, dann folgt aus (5)

$$a_0(z) = 0. \tag{7}$$

Es nimmt daher z an allen Stellen $2^{s-1}1$ die durch (7) definierten Werte an. Ist $z = z_0$ eine Lösung von (7), dann wird durch ein Wertetripel $\lambda_s = 0$, $\mu_s = \mu_{s0}$, $z = z_0$ eine Stelle von F im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$ definiert. Wir betrachten den Fall, daß z_0 eine einfache Lösung von (7) ist, und setzen weiter voraus, daß $z_0 = 0$ und $a_{10}(0) \neq 0$ ist. Wählen wir als Hilfsgrößen $\lambda_s = u$, $\mu_s - \mu_{s0} = v$, so haben wir die Darstellung:

$$x = u(\mu_{s0} + v),\ y = u^s(\mu_{s0} + v)^{s-1},\ z = uP(u, v). \tag{8}$$

Setzen wir $u = v = 0$, so ist i. a. $P(0, 0) \neq 0$. Für $s > 1$ verschwindet P an der Stelle $\lambda_s = 0$, $\mu_s = 0$ und hat die Gestalt

$$P(u, v) = vE(u, v). \tag{9}$$

Wenn $s = 1$, dann gibt es auch eine Stelle, an der $P = 0$ ist, doch hat hier P nicht die Gestalt (9).

2. Fall: $\gamma = s$. Setzen wir $\lambda_\gamma = 0$, dann ergibt sich

$$a_0(z) + \mu_\gamma a_{\gamma 0}(z) = 0. \tag{10}$$

Wir nehmen an, daß die Gleichung (10) nicht zerfällt. In der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle $\mu_\gamma - \mu_{\gamma 0} = 0$, $z = z_0$ der Kurve (10) hat Φ_γ die Gestalt

$$\Phi_\gamma = a(z - z_0) + b(\mu_\gamma - \mu_{\gamma 0}) + (\lambda_\gamma) = 0. \tag{11}$$

Setzen wir $\lambda_\gamma = u$, $\mu_\gamma - \mu_{\gamma 0} = v$, so folgt:

$$x = u(\mu_{\gamma 0} + v),\ y = u^\gamma(\mu_{\gamma 0} + v)^{\gamma - 1},\ z = z_0 + P(u, v). \tag{12}$$

Ist i. b. $\mu_{\gamma 0} = 0$, so ergibt sich aus (10) $a_0(z) = 0$. Wir beschränken uns wieder auf die Stelle $z = 0$ und haben hier die Darstellung:

$$x = uv,\ y = u^\gamma v^{\gamma - 1},\ z = vE(u, v). \tag{13}$$

In der Umgebung der Stellen 2^s ist

$$F = \lambda_s^s \Phi^{(s)}, \tag{14}$$

wobei

$$\Phi^{(s)} = \mu_s^s a_0 + \lambda_s \varphi_{s1} + \cdots + \lambda_s^{\gamma - 2}\varphi_{s,\gamma-2}) + \lambda_s^{\gamma - s}\varphi_{s,\gamma} + \cdots + \lambda_s^{n-s}\varphi_{sn} = 0 \tag{15}$$

und

$$\varphi_{sk} = a_{k0} + a_{k-1,1}\lambda_s^{s-1}\mu_s + \cdots + a_{0k}\lambda_s^{k(s-1)}\mu_s^k.$$

1. Fall: $\gamma > s$. Aus (15) folgt für $\lambda_s = 0$

$$\mu_s a_0(z) = 0. \tag{16}$$

Wenn $\mu_s = 0$, dann nimmt z keine bestimmten Werte an, d. h. die Stelle $\lambda_s = 0$, $\mu_s = 0$ muß noch weiter aufgelöst werden. Ist $\mu_{s0} \neq 0$, dann setzen wir $\lambda_s = u$, $\mu_s - \mu_{s0} = v$ und erhalten

(17) $\qquad x = u,\ y = u^s(\mu_{s0} + v),\ z = uE(u, v).$

2. Fall: $\gamma = s$. Setzen wir $\lambda_\gamma = 0$, so folgt:

(18) $\qquad \mu_\gamma a_0(z) + a_{\gamma 0}(z) = 0.$

In der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle $\mu_\gamma = \mu_{\gamma 0} \neq 0$, $z = z_0$ ergibt sich $z - z_0$ als gewöhnliche Potenzreihe von $\lambda_\gamma = u$ und $\mu_\gamma - \mu_{\gamma 0} = v$. Die Größen x, y, z haben also die Gestalt

(19) $\qquad x = u,\ y = u^\gamma(\mu_{\gamma 0} + v),\ z - z_0 = P(u, v).$

Ist i. b. $\mu_{\gamma 0} = 0$, dann ist

(20) $\qquad x = u,\ y = u^\gamma v,\ z - z_0 = vP(u, v).$

Für unsere weiteren Betrachtungen genügen die Stellen $2^{s-1}1$, an denen $\mu_{s0} = 0$ ist. Setzen wir jetzt $x : y : z : 1 = \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_3 : \mathfrak{A}_4$, so haben wir folgende Darstellungen. Es sind gleichzeitig die Divisoren $\mathfrak{A}_k'$ und $\mathfrak{R}$ mit angegeben.

1. $\quad \mathfrak{A}_k : uv,\ u,\ uP(u, v),\ 1.$
$\quad \mathfrak{A}_k' : -P_2,\ -P - uP_1 + vP_2,\ 1,\ -u^2P_1\ .$
$\quad \mathfrak{R} = -u,\ \mathfrak{D}_0 = u^{-2}$

$2^{s-1}1$. $\quad \mathfrak{A}_k : uv,\ u^s v^{s-1},\ uvE,\ 1.$
$\quad A_1' = u^{s-1}v^{s-2}\{E - (s-1)\,uE_1 + svE_2\},$
$\quad A_2' = uE_1 - vE_2,$
$\quad A_3' = -u^{s-1}v^{s-2},$
$\quad A_4' = -u^s u^{s-1}\{(s-2)\,uE_1 - (s-1)\,vE_2\},$
$\quad R = uv,\ D_0 = u^{-2}v^{-2}$

$2^{\gamma-1}1$. $\quad \mathfrak{A}_k : uv,\ u^\gamma v^{\gamma-1},\ vE,\ 1.$
$\quad \mathfrak{A}_1' = u^{\gamma-1}v^{\gamma-2}\{\gamma E - (\gamma-1)uE_1 + \gamma vE_2\},$
$\quad \mathfrak{A}_2' = -E + uE_1 - vE_2,$
$\quad \mathfrak{A}_3' = -u^\gamma v^{\gamma-2},$
$\quad \mathfrak{A}_4' = -u^\gamma v^{\gamma-1}\{(\gamma-2)E - (\gamma-2)uE_1 + (\gamma-1)vE_2\},$
$\quad \mathfrak{R} = v,\ \mathfrak{D}_0 = v^{-2}.$

§ 2. Die Primteiler.

Wir betrachten den Schnitt $\mathfrak{A}_1$ und setzen

(1) $\qquad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P}.$

In (1) sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ Primteiler, während $\mathfrak{V}$ aus mehreren Primkurven besteht, und zwar treten an sämtlichen Stellen Punktprimteiler auf, die wir mit $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{\gamma-1}$ bezeichnen. Die Primteiler, die durch $u = 0$ und $v = 0$ dargestellt werden, ergeben sich aus folgender Übersicht:

(2)

	1	21	221	. . .	$2^{\gamma-2}1$	$2^{\gamma-1}1$
u	$\mathfrak{V}_1$	$\mathfrak{V}_2$	$\mathfrak{V}_3$	. . .	$\mathfrak{V}_{\gamma-1}$	$\mathfrak{H}$
v	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{V}_1$	$\mathfrak{V}_2$	. . .	$\mathfrak{V}_{\gamma-2}$	$\mathfrak{V}_{\gamma-1}$

Aus der Tabelle (2) finden wir die Schnittpunktzahlen:

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_l) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \pm 1 \\ 0 & \text{„ } k \neq l \text{ und } k \neq l \pm 1 \end{cases}$$

(3)
$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{P}) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{„ } k \neq 1 \end{cases}$$

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{H}) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \gamma - 1 \\ 0 & \text{„ } k \neq \gamma - 1 \end{cases}$$

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) = 0.$$

Um $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k)$ zu bestimmen, bilden wir

(4) $$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}) + (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{P}) = 0.$$

Dabei ist

(5) $$\mathfrak{V} = \prod_{i=1}^{\gamma-1} \mathfrak{V}_i.$$

Es ergibt sich mit Rücksicht auf (3)

(6) $$(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = -2.$$

Ferner ist

(7) $$(\mathfrak{A}', \mathfrak{V}_k) = \begin{cases} 2 & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{„ } k > 1. \end{cases}$$

§ 3. Die charakteristischen Zahlen.

1. Die Klasse:

$$\overline{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{V}) - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) - b_{\mathfrak{P}}.$$

Die Restkurve $\mathfrak{P}$ geht nur durch die Stelle 1. Dort haben die

$\mathfrak{A}_k'(k=2, 3, 4)$ keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Somit ist $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}=1$, also $b_\mathfrak{P}=0$. Wir erhalten, wenn wir noch bedenken, daß die A_k' in den Stellen $2^{s-1}1$, wobei $2\leqq s\leqq\gamma-2$, je einen einfachen Schnittpunkt haben

$$\bar{a}'=a-2-(\gamma-2)=a-\gamma.$$

2. Die Zahl der Rückkehrpunkte:

$$w_1=c-(\mathfrak{H},\mathfrak{R})-(\mathfrak{V},\mathfrak{R})-(\mathfrak{P},\mathfrak{V})-(\mathfrak{H},\mathfrak{P})+b_\mathfrak{P}-2\sigma_\mathfrak{P},$$

Nach § 1 hat $\mathfrak{R}$ die Gestalt

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2\ldots\mathfrak{V}_{\gamma-1}=\mathfrak{V}.$$

An der Stelle 1 hat $\mathfrak{P}$ einen einfachen Punkt, also ist $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}=1$ oder $2\sigma_\mathfrak{P}=0$. Wir erhalten

$$w_1=c-1+2-1=c.$$

3. Die Zahl der Doppelpunkte:

$$2m_0=2b_0-(\mathfrak{H},\mathfrak{D}_0)-(\mathfrak{V},\mathfrak{D}_0)-(\mu-3)(\mathfrak{P},\mathfrak{V})-(\mu-3)(\mathfrak{P},\mathfrak{H})$$
$$-\mu(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})-2b_\mathfrak{P}+4\sigma_\mathfrak{P}.$$

Es ist $\mathfrak{D}_0=\mathfrak{V}^{-2}$. Da $\mathfrak{H}$ einfache Gerade, ist $\mu=1$. Wie sich aus den Darstellungen der $\mathfrak{A}_k$ ergibt, ist $(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})=0$, so daß

$$2m_0=2b_0+2(\mathfrak{H},\mathfrak{V})+2(\mathfrak{V},\mathfrak{V})+2(\mathfrak{P},\mathfrak{V})=2b_0+2-4+2=2b_0$$

wird.

Die hier gefundenen Ergebnisse gelten nur soweit, als die Stellen im Punkte $x=y=z=0$ in Betracht kommen. Da die Restkurve von der Ordnung $n-1$ ist, gibt es $n-1$ Punkte, in denen sich $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ als Kurven der Fläche schneiden. Nehmen wir an, daß diese alle verschieden sind und von derselben Art wie der eben betrachtete Punkt von F, dann ergibt sich

$$\bar{a}'=a-\gamma(n-1).$$

Es bestehen nun die Plückerschen Gleichungen:

$$(n-1)(n-2)=2m+w_1+a-\gamma(n-1),$$
$$n(n-1)=2m+w_1+a.$$

Aus diesen folgt $\gamma=2$.

Die Ebene $y=0$ enthält also die Gerade in der Potenz $\gamma=2$. Die festen Punkte sind Doppelpunkte, und wegen der Voraussetzung, daß die Gleichung (10) § 1 nicht zerfällt, konische Knotenpunkte.

Kapitel III.

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) = 0, \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) > 0.$$

§ 1. Die Stellen.

Wir betrachten eine Fläche mit einer Doppelgeraden $\mathfrak{G}$ in der Umgebung eines ihrer Kniffpunkte. Die in dem Kniffpunkt kondensierte Kurve ist eine Gerade $\mathfrak{H}$, wie wir sie untersuchen wollen.

Die Flächengleichung laute:

(1) $F(x, y; z) = \varphi_2(x, y; z) + \varphi_3(x, y; z) + \cdots + \varphi_n(x, y; z) = 0,$

wobei φ_k in x und y homogen vom Grade k sei und

(2) $$\varphi_2(x, y; z) = x^2 + z\psi_2(x, y; z).$$

Dann sind $x = 0$, $y = 0$ die Gleichungen von $\mathfrak{G}$, der Nullpunkt der Kniffpunkt und $x = 0$ die Tangentialebene im Kniffpunkt.

Wir gehen wieder von der Stelle $x = 0$, $y = 0$ des Körpers T aus und lösen sie auf, indem wir erst $x = \lambda$, $y = \mu$ setzen und wie im Kap. II verfahren. Von den Stellen höherer Ordnung interessieren uns nur die, an denen $z = 0$ ist.

Wird

1. $$\lambda = \lambda_1\mu_1, \quad \mu = \lambda_1; \quad |\mu_1| \leqq r_1$$

gesetzt, so geht (1) über in

(3) $$F \equiv \lambda_1^2\, \Phi_1 = 0,$$

wobei

(4) $\Phi_1 = \bar{\varphi}_2 + \lambda_1\bar{\varphi}_3 + \cdots + \lambda_1^{n-2}\bar{\varphi}_n = 0$, $\bar{\varphi}_k = \varphi_k(\mu_1, 1; z)$

und im besonderen

(5) $$\bar{\varphi}_2 = \mu_1^2 + z\psi_2(\mu_1, 1; z).$$

Setzen wir $\lambda_1 = 0$, so folgt aus (4) $\bar{\varphi}_2 = 0$. Wir beschränken uns auf den Fall, wo ψ_2 bei $\mu_1 = z = 0$ eine Einheit ist, und betrachten die Stelle $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Als Hilfsgrößen wählen wir $\lambda_1 = u$, $\mu_1 = v$. Es ergibt sich:

(6) $$x = uv, \; y = u, \; z = v^2 + uE(u, v).$$

Ist

2. $$\lambda = \lambda_1, \quad \mu = \lambda_1\mu_1; \quad |\mu_1| \leqq \frac{1}{r_1}$$

so wird

$$F \equiv \mu_1^2\, \Phi^{(1)} = 0,$$

wobei

$$\Phi^{(1)} = \bar{\varphi}_2 + \lambda_1\bar{\varphi}_3 + \cdots = 0, \quad \bar{\varphi}_k = \varphi_k(1, \mu_1; z)$$

und i. b.

$$\overline{\varphi}_2 = 1 + z\psi_2(1, \mu_1; z).$$

Man sieht, daß an keiner der Stellen 2 $z = 0$ wird. Also haben wir nur die Darstellung (6) zu betrachten.

Wir gehen zu den Divisoren A_k über und setzen

$$x : y : (z - e_0 y) : 1 = A_1 : A_2 : A_3 : A_4,$$

wenn mit e_0 das konstante Glied in $E(u, v)$ bezeichnet wird. Es folgt

(7) $\quad A_1 = uv,\ A_2 = u,\ A_3 = v^2 + uP(u, v),\ A_4 = 1.$

Dabei ist

$$P(u, v) = au + bv + (2),$$

Aus (7) ergibt sich:

$$A_1' = 2v + uP_2,\ A_2' = -2v^2 + u(P + uP_1 - vP_2),\ A_3' = -u,$$
$$A_4' = u(v^2 - u^2 P_1),\ R = 1.$$

Da alle A_k' für $u = v = 0$ verschwinden, lösen wir diese Stelle weiter auf und setzen

11. $\quad u = u_1 v_1,\ v = u_1\ ,$

12. $\quad u = u_1\ ,\ v = u_1 v_1.$

Dann wird an den Stellen

11. $\quad P(u, v) = u_1 \overline{P} = u_1\{av_1 + b + (u_1)\}$

und

12. $\quad P(u, v) = u_1 \overline{P} = u_1\{a + bv_1 + (u_1)\}.$

Damit ergibt sich für die Stellen

11: $\mathfrak{A}_k$: $u_1^2 v_1,\ u_1 v_1,\ u_1^2\{1 + v_1\overline{P}\},\ 1$
$\mathfrak{A}_1' = 2 + v_1(\overline{P} + u_1\overline{P}_1 - v_1\overline{P}_2),$
$\mathfrak{A}_2' = -u_1\{2 + v_1(u_1\overline{P}_1 - 2v_1\overline{P}_2)\}$
$\mathfrak{A}_3' = -v_1,\ \mathfrak{A}_4' = u_1^2 v_1(1 - v_1^2\overline{P}_2)$
$\mathfrak{R} = -u_1^2,\ \mathfrak{D}_0 = u_1^{-4} v_1.$

und

12: $\mathfrak{A}_k$: $u_1^2 v_1,\ u_1,\ u_1^2(v_1^2 + \overline{P}),\ 1$
$\mathfrak{A}_1' = 2v_1 + \overline{P}_2,\ \mathfrak{A}_2' = u_1(-2v_1^2 + 2\overline{P} + u_1\overline{P}_1 - 2v_1\overline{P}_2),$
$\mathfrak{A}_3' = -1,\ \mathfrak{A}_4' = u_1^2(v_1^2 - \overline{P} - u_1\overline{P}_1 + v_1\overline{P}_2)$
$\mathfrak{R} = u_1^2,\ \mathfrak{D}_0 = u_1^{-4}.$

§ 2. Die Primteiler.

Den an den Stellen 11 und 12 auftretenden Punktprimteiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_1$. $\mathfrak{H}_1$ ist auf F' Gerade und gegeben durch $\mathfrak{A}_2' = 0$, $\mathfrak{A}_4' = 0$ oder durch $\mathfrak{A}_1 = 0$, $\mathfrak{A}_3 = 0$.

Setzen wir $\mathfrak{H}_1 \equiv u_1 = 0$, dann wird an den Stellen

11: $\mathfrak{A}_1' = 2 + bv_1$, $\mathfrak{A}_2' = 0$, $\mathfrak{A}_3' = -v_1$, $\mathfrak{A}_4' = 0$,

12: $\mathfrak{A}_1' = 2v_1 + b$, $\mathfrak{A}_2' = 0$, $\mathfrak{A}_3' = -1$, $\mathfrak{A}_4' = 0$.

Also ist

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{H}_1) = 1, \tag{1}$$

d. h. $\mathfrak{H}_1$ ist einfache Gerade.

Wir betrachten die Schnitte durch $\mathfrak{H}_1$ und setzen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \varrho\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{P} \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{B} = 1$ und

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1^2. \tag{3}$$

Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ ist an den Stellen

$$\begin{cases} 11: & \mathfrak{P} = \varrho + v_1(1 + \varrho b) + \varrho a v_1^2 + (u_1) \\ 12: & \mathfrak{P} = \varrho a + v_1(1 + \varrho b) + \varrho v_1^2 + (u_1). \end{cases} \tag{4}$$

Daraus folgt:

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{H}_1) = 2. \tag{5}$$

Bilden wir $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}_1) = 0$, dann ergibt sich mit Rücksicht auf (2), (3) und (5)

$$(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1) = -1. \tag{6}$$

§ 3. Die charakteristischen Zahlen.

1. Die Klasse:

$$\overline{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}) - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) - b_{\mathfrak{P}}.$$

Um $b_{\mathfrak{P}}$ zu bestimmen, betrachten wir die Divisoren $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_4'$, $\mathfrak{A}_{13}' = \varrho\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}_3'$. Für $\mathfrak{P} = 0$ ergibt sich aus (4) v_1 als gewöhnliche Potenzreihe von u_1, also $v_1 = v_1(u_1)$. Setzen wir diese Entwicklung in die zugeordneten Funktionen der $\mathfrak{A}_k'$ ein, dann zeigt sich, daß $\mathfrak{A}_{13}'$ i. a. eine Einheit, d. h. $b_{\mathfrak{P}} = 0$ ist. Damit ergibt sich für einen gewöhnlichen Schnitt

$$\overline{a}' = a - 2.$$

2. Die Zahl der Rückkehrpunkte:

$$w_1 = c - (\mathfrak{H}, \mathfrak{R}) - (\mathfrak{V}, \mathfrak{R}) - (\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) + b_{\mathfrak{P}} - 2\sigma_{\mathfrak{P}}.$$

Da $\mathfrak{P}$ als Kurve auf der Fläche keinen Doppelpunkt hat, ist $2\sigma_{\mathfrak{P}} = 0$. Es wird daher

$$w_1 = c - (\mathfrak{H}_1^2, \mathfrak{H}_1^2) - (\mathfrak{H}_1^2, \mathfrak{P}) = c + 4 - 4 = c.$$

3. Die Zahl der Doppelpunkte:

Da in unserem Falle in der Formel (11) Kap. I, § 3 $\mu = 0$ ist, wird

$$2m_0 = 2b_0 - (\mathfrak{H}, \mathfrak{D}_0) - (\mathfrak{V}, \mathfrak{D}_0) + 3(\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) + 3(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) - 2b_{\mathfrak{P}} + 4\sigma_{\mathfrak{P}}.$$

Hierin die Werte eingesetzt, ergibt

$$2m_0 = 2b_0 - 10 + 12 = 2(b_0 + 1).$$

Kapitel IV.

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) > 0, \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) > 0.$$

§ 1. Vorbemerkung.

Es sei $\mathfrak{H}$ gewöhnliche mehrfache Gerade auf F und F'. In einem nicht besonders gewähltem Punkt von $\mathfrak{H}$ sind sämtliche Tangentialebenen und bei einer nicht speziell gewählten Ebene alle Berührungspunkte verschieden. Wir betrachten Singularitäten, die durch das Zusammenfallen von Tangentialebenen und Berührungspunkten entstehen.

§ 2. Der Kniffpunkt.

Als Beispiel wählen wir die Fläche, die wir im vorhergehenden Kapitel betrachtet haben und untersuchen die Schnitte durch die Doppelgerade $\mathfrak{G}$. Wir setzen

$$(1) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \varrho\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{V}\mathfrak{G}\mathfrak{P}$$

dabei ist $\mathfrak{V} = \mathfrak{H}_1$.

In den Formeln für die charakteristischen Zahlen ist also $\mathfrak{V}$ durch $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{G}$ zu ersetzen.

Die Anzahlen der Doppel- und Rückkehrpunkte von $\mathfrak{P}$ erleiden keine Änderung. Für die Klasse

$$\bar{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}_1) - (\mathfrak{A}', \mathfrak{G}) - b_{\mathfrak{P}}$$

ergibt sich, da $(\mathfrak{A}', \mathfrak{H}_1) = 1$ ist

$$\bar{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{G}) - b_{\mathfrak{P}} - 1.$$

Der Divisor $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$ erhält aus den Stellen 11 und 12 keinen Beitrag, da $\mathfrak{P}$ nicht durch diese Stellen geht. Doch können wir nicht annehmen, daß $b_{\mathfrak{P}} = 0$ ist, da z. B. jeder einfache Schnittpunkt von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$, in dem F keine Besonderheiten hat, zu $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}$ einen Beitrag liefert und $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}) \neq 0$ ist.

Kapitel V.

Der $\bar{n} + 1$ fache Punkt.

§ 1. Die Stellen.

Wir wollen die Schnitte durch eine $\bar{n}$fache Gerade in der Umgebung eines $\bar{n} + 1$fachen Punktes untersuchen. Die Flächengleichung habe die Form

(1) $F(x, y; z) = z\varphi_{\bar{n}}(x, y; z) + \varphi_{\bar{n}+1}(x, y; z) + \cdots + \varphi_n(x, y; z) = 0$

wobei

(2) $\qquad \varphi_{\bar{n}} = a_{\bar{n}} x^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1} x^{\bar{n}-1} y + \cdots + a_0 y^{\bar{n}}$,

mit $a_{\bar{n}} \neq 0$.

Es sei wieder $x = \lambda$, $y = \mu$ gesetzt. Die Transformation

1. $\qquad \lambda = \lambda_1 \mu_1, \qquad \mu = \lambda_1; \qquad |\mu_1| < r_1$

führt F über in:

(3) $\qquad \Phi_1 = z\varphi_{\bar{n}} + \lambda_1 \varphi_{\bar{n}-1} + \cdots + \lambda_1^{n-\bar{n}} \varphi_n = 0.$

Für $\lambda_1 = 0$ wird

(4) $\qquad z\varphi_{\bar{n}}(\mu_1, 1; z) = 0.$

Wir betrachten

I. die Stellen, in denen $z = 0$, $\varphi_{\bar{n}}(\mu_{10}, 1, 0) \neq 0$,

II. die Stellen, in denen $z = 0$, $\varphi_{\bar{n}}(\mu_{10}, 1, 0) = 0$

ist.

Im Falle I wählen wir $\lambda_1 = u$, $\mu_1 - \mu_{10} = v$ als Hilfsgrößen und entwickeln z nach Potenzen von u, v. Das ergibt:

$$(5) \qquad x = u(\mu_{10} + v),\ y = u,\ z = uE(u, v).$$

Diese Darstellung gilt für unendlich viele Stellen.

Im Falle II läßt sich unter der Voraussetzung, daß $\varphi_{\bar{n}+1} \neq 0$ für $\mu_1 = \mu_{10}$ und $z = 0$, λ_1 nach Potenzen von $\mu_1 - \mu_{10}$ und z entwickeln. Sei $z = u$, $\mu_1 - \mu_{10} = v$, dann wird

$$\lambda_1 = uP(u, v)$$

und somit

$$(6) \qquad x = (\mu_{10} + v)uP,\ y = uP,\ z = u.$$

Diese Entwicklung gilt bei passender Wahl von r_1 für $\bar{n}$ Stellen.

Bei Anwendung der Transformation 2 erhalten wir formal die gleichen Darstellungen wie (5) und (6), nur mit dem Unterschied, daß sich x und y vertauschen. Wir beschränken uns daher auf die Darstellungen (5) und (6) und setzen $x : y : z : 1 = \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_3 : \mathfrak{A}_4$. Das ergibt:

I. $\mathfrak{A}_1 = u(\mu_{10} + v)$, $\mathfrak{A}_2 = u$, $\mathfrak{A}_3 = uE(u, v)$, $\mathfrak{A}_4 = 1$

II. $\mathfrak{A}_1 = u(\mu_{10} + v)P$, $\mathfrak{A}_2 = uP$, $\mathfrak{A}_3 = u$, $\mathfrak{A}_4 = 1$.

Hieraus folgt:

I. $\mathfrak{A}_1' = E_2$, $\mathfrak{A}_2' = E + uE_1 - (\mu_{10} + v)E_2$, $\mathfrak{A}_3' = -1$,
$\mathfrak{A}_4' = -u^2 E_1$, $\mathfrak{R} = u$, $\mathfrak{D}_0 = u^{\bar{n}-3}$,

II. $\mathfrak{A}_1' = P_2$, $\mathfrak{A}_2' = -P - (\mu_{10} + v)P_2$, $\mathfrak{A}_3' = P(P + uP_1)$,
$\mathfrak{A}_4' = -u^2 PP_1$, $\mathfrak{R} = -u$, $\mathfrak{D}_0 = u^{\bar{n}-3} P^{\bar{n}-1}$.

§ 2. Die Primteiler.

Es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \varrho \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{P}$$

ein Schnitt durch $\mathfrak{H}$. Dabei sind $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ Primteiler. Ihre zugeordneten Funktionen sind in nachstehender Übersicht zusammengestellt:

Stelle	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{P}$
I	u	1	$\mu_{10} + \varrho + v$
II	u	P	$\mu_{10} + \varrho + v$

Hieraus folgt;

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) = \overline{n}, \quad (\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) = 1.$$

Da $(\mathfrak{V}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) = 0$ ist, wird

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = -(\overline{n} + 1).$$

An jeder Stelle II haben $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{V}$ zwei Schnittpunkte. Also ist

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{V}) = 2\overline{n}.$$

§ 3. Die charakteristischen Zahlen.

1. Die Klasse

$$\overline{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{V}) - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) - b_{\mathfrak{P}}$$

wird

$$\overline{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) - b_{\mathfrak{P}} - 2\overline{n}.$$

2. Die Zahl der Rückkehrpunkte:

$$w_1 = c - (\mathfrak{V}, \mathfrak{R}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{R}) - (\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) + b_{\mathfrak{P}} - 2\sigma_{\mathfrak{P}}.$$

Da $\mathfrak{R} = \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = 1$, wird

$$w_1 = c - (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{V}) - (\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) + b_{\mathfrak{P}}$$

also

$$w_1 = c - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) + b_{\mathfrak{V}}.$$

Die Zahl der Rückkehrpunkte erleidet daher durch einen $\overline{n} + 1$ fachen Punkt keine Veränderungen.

3. Die Zahl der Doppelpunkte:

$$\begin{aligned} 2m_0 = 2b_0 &- (\mathfrak{H}, \mathfrak{D}_0) - (\mathfrak{V}, \mathfrak{D}_0) - (\mu - 3)(\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) \\ &- (\mu - 3)(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) - \mu(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - 2b_{\mathfrak{P}} + 4\sigma_{\mathfrak{P}}. \end{aligned}$$

In unserem Falle ist $\mu = \overline{n}$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = 1$ und $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0$. Ferner ist

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{V}^{\overline{n}-3}\mathfrak{H}^{\overline{n}-1},$$

so daß

$$\begin{aligned} 2m_0 = 2b_0 &- (\overline{n} - 3)\{(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) + (\mathfrak{H}, \mathfrak{P})\} \\ &- (\overline{n} - 1)\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{H})\} - 2b_{\mathfrak{P}} \end{aligned}$$

wird. Da $\mathfrak{A} = \mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{V}\mathfrak{H} \sim \mathfrak{A}\mathfrak{P}^{-1}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2m_0 = 2b_0 &- (\overline{n} - 3)\{(\mathfrak{P}, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{V})\} \\ &- (\overline{n} - 1)\{(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) - (\mathfrak{P}, \mathfrak{H})\} - 2b_{\mathfrak{P}} \end{aligned}$$

oder

$$2m_0 = 2b - \overline{n}(\overline{n} - 1) + 2(\mathfrak{P}, \mathfrak{H}) - 2b_{\mathfrak{P}}.$$

Das ist aber die Zahl der mehrfachen Punkte, die sich allein aus der Tatsache, daß die Schnittebene durch die $\bar{n}$fache Gerade geht, ergibt. Also wirkt sich der $\bar{n}+1$fache Punkt auf $2m_0$ nicht aus.

Kapitel VI.

Der stationäre Punkt.

§ 1. Die Stellen.

Wir betrachten das Beispiel

(1) $F(x,y,z)=(z-4x^2)^3+(3xz-y^2-8x^3)^2=0.$

Die Gerade $y=z=0$ ist Doppelgerade, was man sofort sieht, wenn man (1) in folgender Form schreibt:

(2) $F(x,y,z)=z^3-3z^2x^2-6xy^2z+y^4+16x^3y^3=0.$

(3) $z-4x^2=0, \quad 3xz-y^2-8x^3=0$

sind die Gleichungen der Rückkehrkurve. Ebenso

(4) $z-4x^2=0, \quad y^2-4x^3=0.$

Um die Größen x, y, z durch zwei Hilfsgrößen u, v darzustellen, setzen wir zunächst

(5) $z-4x^2=w^2$

dann folgt aus (1)

$$y^2=4x^3-3xw^2-w^3=(x-w)(2x+w)^2.$$

Es werden dann die beiden Transformationen

A $w=\eta x$ für $\left|\frac{w}{x}\right|=\eta\leqq 2$

B $x=wv$ für $\left|\frac{w}{x}\right|>2$ oder $|v|<\frac{1}{2}$

angewandt.

A. Es wird

$$y^2=x^3(1-\eta)(2+\eta)^2, \qquad y=x(2+\eta)\sqrt{x(1-\eta)}$$

1. $\eta_0\neq 1$. Sei $\eta=\eta_0+v$, $x=u^2$, so erhält man die Darstellung

(6) $x=u^2 \qquad y=u^3(2+\eta)\sqrt{1-\eta} \qquad z=u^4(4-\eta^2)$

2. $\eta_0 = 1$. Wir setzeu

$$x = u \quad , \quad 1 - \eta = uv^2 \text{ für } \left|\frac{1-\eta}{x}\right| = v^2 \leqq 1, \text{ also } |v| \leqq 1$$

$$x = uv^2, \quad 1 - \eta = u \quad \text{für } \left|\frac{1-\eta}{x}\right| = \frac{1}{v^2} > 1, \text{ also } |v| < 1.$$

Das ergibt

(7) $x = u, \quad y = u^2 v\,(3 - uv^2), \; z = u^2\,(3 - uv^2)\,(1 + uv^2)$

und

(8) $x = uv^2, \; y = u^2 v^3\,(3 - u) \; , \; z = u^2 v^4\,(3 - u)\,(1 + u) \; .$

B. Es wird

$$x = wv, \quad y = w\,(2v + 1)\sqrt{w\,(v - 1)}, \; z = w^2\,(4v^2 - 1).$$

Setzt man $w = u^2$, dann folgt:

(9) $x = u^2 v, \; y = u^3\,(2v + 1)\sqrt{v - 1}, \quad z = u^4\,(9v^2 - 1).$

Gehen wir zu den Divisoren $\mathfrak{A}_k$ über, indem wir $x : y : z : 1 = \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_3 : \mathfrak{A}_4$ setzen, so erhalten wir

I. $\mathfrak{A}_1 = u^2, \; \mathfrak{A}_2 = u^3\,(2 + \eta)\sqrt{1 - \eta}, \; \mathfrak{A}_3 = u^4\,(4 - \eta^2), \; \mathfrak{A}_4 = 1$

$$\mathfrak{R} = \frac{u^4 \eta}{\sqrt{1 - \eta}}, \; \mathfrak{D}_0 = -u^{-4}\,(2 + \eta)\,(1 - \eta), \; \mathfrak{R}' = -\frac{108 u^2}{\sqrt{1 - \eta}}$$

$$\mathfrak{A}_1' = 6u^2(2 + \eta), \; \mathfrak{A}_2' = 2u\sqrt{1 - \eta}, \; \mathfrak{A}_3' = -3, \; \mathfrak{A}_4' = -u^4(2 + \eta)^2;$$

II. $\mathfrak{A}_1 = u, \; \mathfrak{A}_2 = u^2 v\,(3 - uv^2), \; \mathfrak{A}_3 = u^2\,(3 - uv^2)\,(1 + uv^2), \; \mathfrak{A}_4 = 1$

$$\mathfrak{R} = u^2\,(1 - uv^2), \; \mathfrak{D}_0 = -u^{-2}\,(3 - uv^2), \; \mathfrak{R}' = -216\,u\,,$$

$$\mathfrak{A}_1' = -6u\,(3 - uv^2), \; \mathfrak{A}_2' = -4uv, \; \mathfrak{A}_3' = 3, \; \mathfrak{A}_4' = u^2(9 - u^2 v^4)$$

III. $\mathfrak{A}_1 = uv^2, \; \mathfrak{A}_2 = u^2 v^3\,(3 - u), \; \mathfrak{A}_3 = u^2 v^4\,(3 - u)\,(1 + u), \; \mathfrak{A}_4 = 1$

$$\mathfrak{R} = u^2 v^4\,(1 - u), \; \mathfrak{D}_0 = -u^{-2} v^{-4}\,(3 - u), \; \mathfrak{R}' = -216\,uv^2,$$

$$\mathfrak{A}_1' = 6uv^2(3 - u), \; \mathfrak{A}_2' = 4uv, \; \mathfrak{A}_3' = -3, \; \mathfrak{A}_4' = -u^2 v^6(9 - u^2);$$

IV. $\mathfrak{A}_1 = u^2 v, \; \mathfrak{A}_2 = u^3\,(2v + 1)\sqrt{v - 1}, \; \mathfrak{A}_3 = u^4\,(4v^2 - 1), \; \mathfrak{A}_4 = 1$

$$\mathfrak{A}_1' = 3u^2, \; \mathfrak{A}_2' = -4u\sqrt{v - 1}, \; \mathfrak{A}_3' = 3, \; \mathfrak{A}_4' = -u^4(1 - 2v - 8v^2)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{u^4}{\sqrt{v - 1}}.$$

§ 2. Die Primteiler.

Wir betrachten den Schnitt

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B} \mathfrak{H} \mathfrak{P}.$$

Dabei ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^3 \mathfrak{B}_2^2$, wenn mit $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die an den Stellen I

bis IV auftretenden Punktprimteiler bezeichnet werden. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ sind Primkurven. Die zugeordneten Funktionen sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt

	I	II	III	IV
$\mathfrak{B}_1$	u	1	v	u
$\mathfrak{B}_2$	1	u	u	1
$\mathfrak{H}$	$2+\eta$	1	1	1
$\mathfrak{P}$	1	v	1	1

Daraus ergibt sich:

$$(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = 1, \quad (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}) = 1, \quad (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{H}) = 0, \quad (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{P}) = 0, \quad (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{P}) = 1.$$

Weiterhin ist

$$(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) = -1, \quad (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2) = -2, \quad (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}') = 0, \quad (\mathfrak{B}_2, \mathfrak{A}') = 0.$$

§ 3. Die charakteristischen Zahlen.

1. Die Klasse:

$$\overline{a}' = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}) - (\mathfrak{A}', \mathfrak{H}) - b_{\mathfrak{P}}.$$

Die betrachteten Stellen liefern zu $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B})$ keinen Beitrag, da beide Punktprimteiler gleichzeitig Ebenenkurven sind. Also ändert die Klasse sich nicht.

2. Die Zahl der Rückkehrpunkte:

$$w_1 = c - (\mathfrak{B}, \mathfrak{R}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{R}) - (\mathfrak{B}, \mathfrak{P}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) + b_{\mathfrak{P}} - 2\sigma_{\mathfrak{P}}.$$

Es ist überall $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = 1$, also $2\sigma_{\mathfrak{P}} = 0$. Ferner ist:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{B}_1^4 \mathfrak{B}_2^2 \overline{\mathfrak{R}}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^3 \mathfrak{B}_2^2.$$

Dann wird:

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{R}) = 12(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) + 14(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) + 4(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2) + 3(\mathfrak{B}_1, \overline{\mathfrak{R}}) + 2(\mathfrak{B}_2, \overline{\mathfrak{R}}) = -3,$$

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}) = 4(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}) + 2(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{H}, \overline{\mathfrak{R}}) = 4,$$

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{P}) = 3(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{P}) + 2(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{P}) = 2.$$

Es ergibt sich

$$w_1 = c - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) + b_{\mathfrak{P}} - 3.$$

3. Die Zahl der Doppelpunkte:

$$2m_0 = 2b_0 - (\mathfrak{H}, \mathfrak{D}_0) - (\mathfrak{V}, \mathfrak{D}_0) - (\mu - 3)(\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) - (\mu - 3)(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) - \mu(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - 2b_{\mathfrak{P}} + 4\sigma_{\mathfrak{P}}.$$

Es ist

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{V}_1^{-4}\mathfrak{V}_2^{-4}\mathfrak{H}.$$

Damit wird

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{D}_0) = (\mathfrak{V}_1^3\mathfrak{V}_2^2, \mathfrak{V}_1^{-4}\mathfrak{V}_2^{-2}\mathfrak{H}) = -12(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1) - 14(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2) - 4(\mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_2) + 3(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{H}) + 2(\mathfrak{V}_2, \mathfrak{H})$$

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{D}_0) = 12 - 14 + 8 + 3 = 9,$$

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{D}_0) = -4(\mathfrak{H}, \mathfrak{V}_1) - 2(\mathfrak{H}, \mathfrak{V}_2) + (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) - 7(\mathfrak{H}, \mathfrak{V}_1) - 4(\mathfrak{H}, \mathfrak{V}_2) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P})$$

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{D}_0) = 2 - 7 - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) = -5 - (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}).$$

Zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ liefern unsere Stellen keinen Beitrag. Es sei daher $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0$ angenommen. Da $\mu = \overline{n} = 2$, folgt für

$$2m_0 = 2\mathfrak{b}_0 - 2 + 2(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}) - 2b_{\mathfrak{P}}.$$

Die Zahl der Doppelpunkte wird also nicht verändert. (Vergl. Kap. V.)

Lebenslauf.

Am 2. Januar 1911 wurde ich, Martin, Emil, Reinhold Dingel, als Sohn des Lehrers Alfred Dingel und seiner Ehefrau, geb. Triebel, in Groß-Welsbach bei Langensalza geboren. Ich bin evangelisch.

In Erfurt, wohin meine Eltern inzwischen verzogen waren, besuchte ich 4 Jahre die Mittelschule und 9 Jahre die Oberschule, die ich Ostern 1930 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Anschließend studierte ich in München (S.-S. 1930—W.-S. 1931/32) und Halle (S.-S. 1932 — Nov. 1934) Mathematik, Physik und Chemie.

Meine Lehrer in München waren die Herren Professoren und Dozenten: Bochner, Gallinger, Gerlach, Graetz, Hartogs, Kirchner, Lettenmeyer, Rüchardt, Schütz, Tietze, Wieland; in Halle: Brandt, Conrad, Gelb, Hahne, Hoffmann, Jung, Kürten, Menzer, Neiß, Pose, Scholder, Smekal, Vorländer.